## 基础课14 函数的零点与方程的解

### 课时评价·提能

#### 基础巩固练

1. 已知函数，则的零点为（ B ）.

A. 1和 B. 和 C. 和, D. ,和

[解析]对于函数，令，即，解得 或，所以 的零点为 和.故选.

2. 已知函数则函数的零点的个数为（ D ）.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

[解析]当 时，令，可得；

当 时，令，可得 或.

综上所述，函数 的零点为0，，，共3个.故选.

3. 某同学用二分法求函数的零点时,计算出如下结果：,,,,,.下列说法正确的是（ B ）.

A. 1.4065是满足精度为0.01的近似值 B. 1.375是满足精度为0.1的近似值

C. 1.4375是满足精度为0.01的近似值 D. 1.25是满足精度为0.1的近似值

[解析],,又,错误;

,,又,正确,错误;

,,，错误.故选.

4. 函数的零点所在的区间为（ C ）.

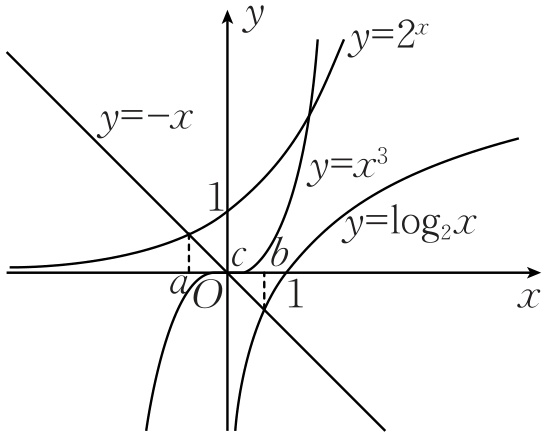
A. B. C. D.

[解析]依题意，函数 的定义域为，而 在 上单调递减，在 上单调递减,所以 在 上单调递减.因为，所以，即，所以，，所以，所以函数 在区间 上有零点.故选.

5. 已知函数，，的零点分别为,,，则（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]在同一平面直角坐标系中作出,,,的大致图象如图所示.



由图象知.故选.

6. 已知函数，，则两个函数图象所有交点的横坐标之和为（ D ）.

A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

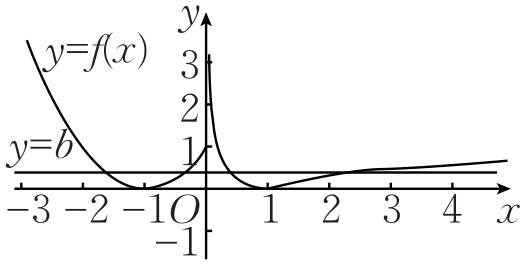
[解析]函数 与 的图象所有交点的横坐标之和，可以转化为方程 的所有实数根之和.

因为 和 的图象均关于直线 对称，且两个图象有两个交点，所以两个交点的横坐标之和为4.故选.

7. [2024·济南模拟]已知函数若函数有四个不同的零点，则实数的取值范围为（ A ）.

A. B. C. D.

[解析]依题意，作出 的图象与直线,如图所示，



因为函数 有四个不同的零点，所以方程 有四个不同的解，所以函数 的图象与直线 有四个不同的交点，结合图象，可知实数 的取值范围为.故选.

8. 若关于的不等式在区间内有解，则实数的取值范围是（ B ）.

A. B. C. D.

[解析]不等式等价于存在,使,即,设,当 时，,则.故选.

#### 综合提升练

9. （多选题）已知当时,,则关于函数下列说法正确的是（ ACD ）.

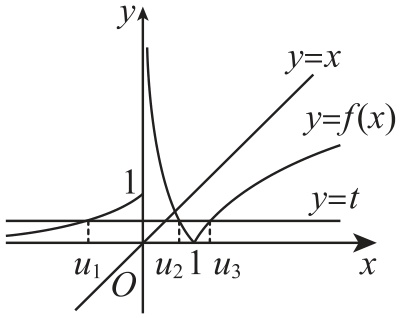
A. 方程的解只有一个

B. 方程的解有五个

C. 方程的解有五个

D. 方程的解有五个

[解析]作出 的图象,如图,



因为当 时，,所以 与 有唯一交点,正确;

令,则 或 或 或 或，易知 时有1个解，时有3个解，时有2个解，共6个解,错误;

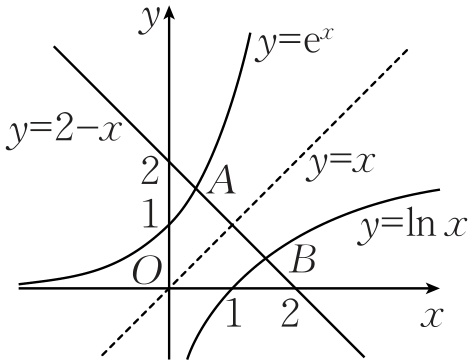
令,则,,,, ,有3个解,有2个解,共有5个解,正确;

令,则,,,所以,,，所以 有3个解,有2个解,共有5个解,正确.故选.

10. （多选题）已知函数的零点为，函数的零点为，则下列不等式成立的是（ BC ）.

A. B. C. D.

[解析]令，，则，，在同一平面直角坐标系中分别作出函数,,的大致图象，如图所示.



因为函数 的零点为，函数 的零点为，

所以,，由 得

因为函数 与 互为反函数，

所以由反函数的性质知，关于点 对称，

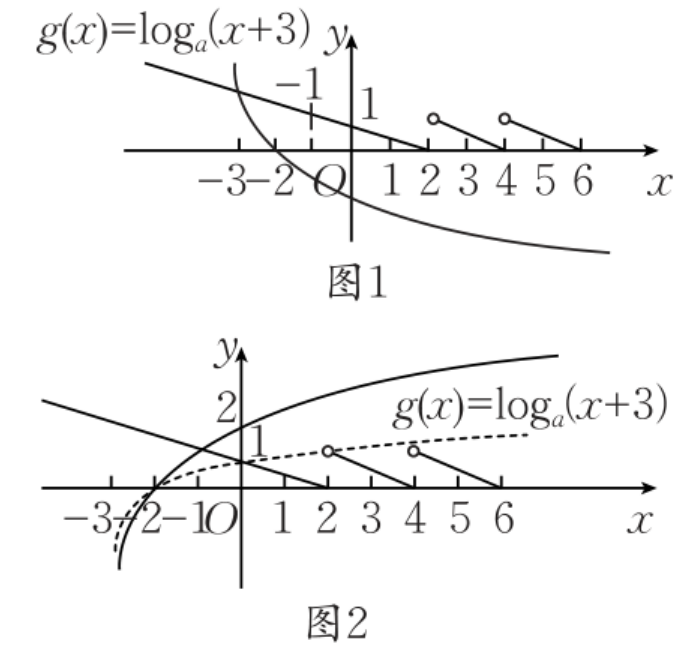
则，，所以，当且仅当 时，等号成立.

所以，错误，，正确.故选.

11. 若函数与函数且的图象有且仅有一个交点，则实数的取值范围为  .

[解析]当 时，由，知此时 的周期.

当 时，，，作出分段函数 的部分图象.当 时，由图1可知，显然成立;当 时，如图2，则，即，即.



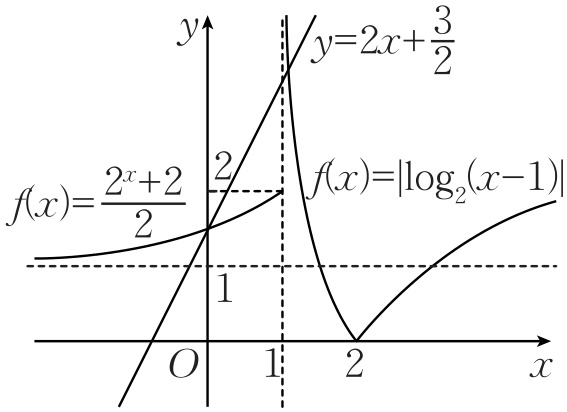
综上所述，的取值范围为.

12. 已知函数则函数的零点个数是4.

[解析]令，则 等价于，

作出 的图象和直线，如图所示.

由图象可得函数 的图象与直线 有两个不同的交点，设这两个交点的横坐标分别为,,则,.



当 时，，有1个解；当 时，有3个解.

综上所述，共有4个解，即函数 有4个零点.

#### 应用情境练

13. （双空题）设函数的定义域为，且满足，，当时，，则  ，函数有10个零点.

[解析]由，知函数 的图象关于直线 对称，且，

由，知函数 的图象关于点 对称，

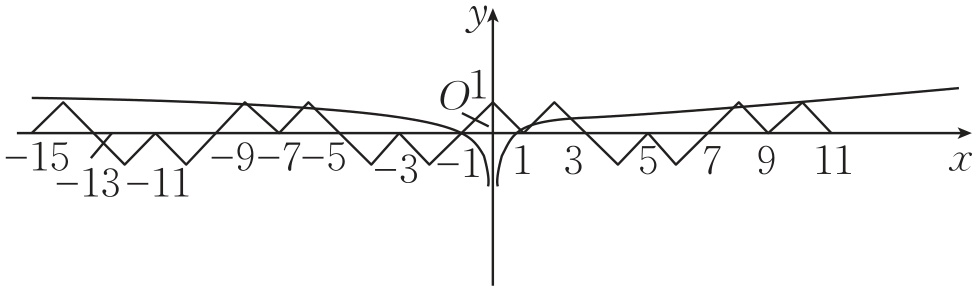
且，

所以，故，

则，

故函数 的周期为8.

当 时,，根据周期和对称性可作出 的图象，如图所示.



由图可知，,,,,,,,，得，

所以.

由 在 上单调递减，且,;在 上单调递增，且,.结合图象，得 和 的图象有10个交点，即函数 有10个零点.

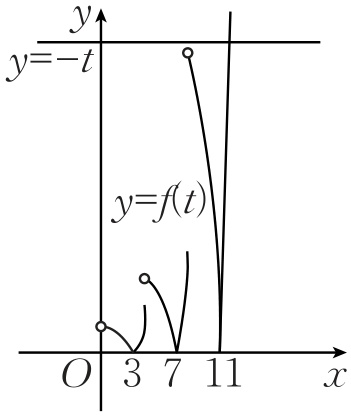
14. 已知函数的定义域为，恒有，当时，.若函数有4个零点，则实数的取值范围为  .

[解析]当 时，，则.

当 时，，则.

所以

则，作出 的大致图象如图所示.



令，可得 或.

由题意得方程 有4个根,

由，可得 或 或，

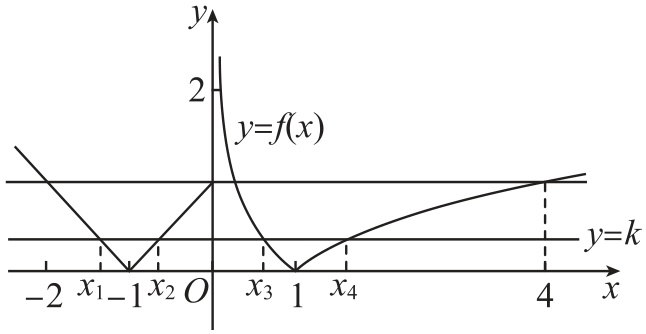
所以 仅有1个根，又，，

则，解得.

#### 创新拓展练

15. 已知函数若方程有4个不同的根,,,,且,则的取值范围是  .

[解析]作出函数 与 的图象，如图，



由方程 有4个不同的根,,,,且,

可知,关于 对称,则；且,

则,即,则,

即，则，

当 时，或,则，.

所以,，

令,

则其在 上为减函数,在 上为增函数.

故当 时，取得最小值，最小值为,而当 时,取得最大值，最大值为9.

故 的取值范围是.

16. 在数学中，布劳威尔不动点定理是拓扑学里一个非常重要的不动点定理，它可运用到有限维空间并构成一般不动点定理的基石.简单地讲：对于满足一定条件的连续函数，存在实数，使得，我们就称该函数为“不动点函数”，实数为该函数的“不动点”.

（1）求函数的“不动点”；

（2）若函数有两个“不动点”,，且，，求实数的取值范围.

[解析]（1）设函数 的“不动点”为，则.

即，所以，解得，故 的“不动点”为1.

（2）因为函数 有两个“不动点”,，

所以 的解为,，则，.

令，且.

①当 时，

若，则，不满足题意，

若,则，即，

即函数 的两个零点分别在区间,内，

所以，即,所以，化简得，所以，解得.

②当 时,

若，则，不满足题意，

若，则，即，

即函数 的两个零点分别在区间,内，

所以，即.

又，所以，解得.

综上所述，实数 的取值范围是 ,,.